ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Είναι μια παράσταση της μορφής : $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n = f(x)$ ← κέντρο σύγκλισης.

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $|x-x_0| < R$ ← ακτίνα σύγκλισης, (x_0-R, x_0+R) διάστημα σύγκλισης

- Ισχύει ότι : $R = \dfrac{1}{\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|C_n|}}$

Αν $\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|C_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$

Αν $\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|C_n|} = \infty \Rightarrow R = 0$.

→ Αν $\exists \lim \left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| \in \mathbb{R}$ τότε $\lim \left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim \sqrt[\nu]{|C_n|}$ και $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[\nu]{|C_n|}}$

- Οι δυναμοσειρές παραγωγίζονται <u>όρο προς όρο</u>.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$

$f'(x) = \left[C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + \cdots\right]' = 0 + C_1 + C_2 \cdot 2(x-x_0) + C_3 \cdot 3(x-x_0)^2 + \cdots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$, $|x-x_0| < R$. (ισχύει για όλα τα x)

→ Αν έχω μια συνάρτηση $f(x)$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη, μπορώ να την γράψω σε μορφή δυναμοσειράς, αν μπορώ να την γράψω στη μορφή : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x)$.

Αν το υπόλοιπο $R_n(x) \to 0$ και η υπόλοιπη σειρά $\to \infty$, τότε έχω δυναμοσειρά.

Αναλυτική συνάρτηση : μια συνάρτηση που μπορεί να παρασταθεί σε μορφή δυναμοσειράς.

Π.χ. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$

$f(x) = x^2+3x+1$, είναι αναπτυγμένο σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο 0.

$f(x) = 1+3x+x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \| \; c_0=1,\ c_1=3,\ c_2=1,\ c_3=c_4=\dots=0.$

Αν θέλω ανάπτυγμα γύρω από άλλο σημείο τότε:

$f(x) = 1+3(x-2+2)+(x-2+2)^2 = 1+3(x-2)+6+(x-2)^2+4(x-2)+4$

$= 11+7(x-2)+(x-2)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n \quad \| \; a_0=11,\ a_1=7,\ a_2=1.$

Ιδιότητες Αθροισμάτων

- $\sum_{i=k}^{\lambda} a_i = \sum_{i=k+5}^{\lambda+5} a_{i-5}$ (θα πρέπει πάντα $\lambda > k$)

Π.χ. $\sum_{i=3}^{7} i^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$

$\sum_{i=3-k}^{7-k} (i+k)^2 = 3^2+4^2+\dots+7^2$

- $\sum_{k=5}^{5} f(x) = f(5)$

$\sum_{k}^{\lambda} f(x) + \sum_{\lambda+1}^{\mu} f(x) = \sum_{k}^{\mu} f(x)$

$\sum_{i=\mu}^{i=5} \left[k c_i (x-x_0)^n + \lambda b_i (x-x_0)^n\right] = k \sum_{\mu}^{5} c_i (x-x_0)^n + \lambda \sum_{\mu}^{5} b_i (x-x_0)^n.$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

$a_{n+2} + n^2 a_{n+1} - (2n+3) a_n = f(n)$, $n \geq 0$

Η διαφορά $n+2-n=2$ ονομάζεται <u>βήμα</u> της αναδρομικής εξίσωσης.

Μπορώ να την επιλύσω μόνο όταν έχω σταθερούς συντελεστές:

$a_{n+2} + 7a_{n+1} - 3a_n = 0$

Π.χ. $\underline{a_{n+2} = 7a_n}$ (a_0, a_1) (πρέπει να θεωρήσω 2 περιπτώσεις όταν το βήμα είναι ≥ 2)

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= 7a_0 \\ a_4 &= 7a_2 \\ a_6 &= 7a_4 \\ &\vdots \\ a_{2k} &= 7a_{2(k-1)} \end{aligned}\right\} \underline{a_{2k} = 7^k a_0} \qquad \left.\begin{aligned} a_3 &= 7a_1 \\ a_5 &= 7a_3 \\ a_7 &= 7a_5 \\ &\vdots \\ a_{2k+1} &= 7a_{2k-1} \end{aligned}\right\} \underline{a_{2k+1} = 7^k a_1}$$

Επίλυση δεύτερης τάξης δ.ε. με δυναμοσειρές

$a_2(x)\,y''(x) + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = 0$, $\quad a_0, a_1, a_2 \in C(I)$, $x_0 \in I$.

x_0: <u>ομαλό σημείο</u> $\rightarrow$ $a_2(x_0) \neq 0$

$\rightarrow$ $\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$: αναλυτικές στο x_0 (να μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά)

Αν δεν ισχύει έστω ένα από τα παραπάνω, το x_0 είναι <u>ανώμαλο σημείο</u>.

Π.χ. • $y'' + (\cos x)y' + e^x y = 0$, $x_0 = 0$.

$a_2 = 1$, $\underbrace{a_1 = \cos x, \quad a_0 = e^x}_{\text{παντού αναλυτικές}}$ $\Rightarrow$ $x_0 = 0$: ομαλό σημείο.

• $(x-2)y'' + \sin(2x)y' + (x^2+1)y = 0$, $x_0 = 2$.

Επειδή στο σημείο $x_0 = 2$ μηδενίζεται ο συντελεστής $a_2(x_0)$, έπεται ότι το $x_0 = 2$ δεν είναι ομαλό σημείο.

• $y'' + |x| \cdot y' + (x+1)^{1/3} y = 0$.

Στο σημείο $x_0 = 0$, η $|x|$ δεν είναι αναλυτική και στο σημείο $x_0 = -1$, η $(x+1)^{1/3}$ δεν είναι αναλυτική. Επομένως, τα σημεία αυτά είναι ανώμαλα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ας είναι $x_0 \in I$, ομαλό σημείο της (E_0) και $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n$,

$|x-x_0| < R_1$, $\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n$, $|x-x_0| < R_2$, $R = \min\{R_1, R_2\}$

Αν c_0, c_1 είναι (δοσμένες) σταθερές, τότε υπάρχουν $c_2, c_3, \dots$ σταθερές τέτοιες ώστε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ να έχει ακτίνα σύγκλισης $\geq R$ και η συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, $x \in I$, $|x-x_0| < R$, να είναι λύση της (E_0) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = c_0$, $y'(x_0) = c_1$.